

ВВЕДЕНИЕ

1. Число z записать в алгебраической форме.

Найти \bar{z} , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$.

$$z = \frac{5 + i}{-3 + 2i}.$$

Решение. Умножим и разделим число z на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{5 + i}{-3 + 2i} = \frac{(5 + i)(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = \frac{-15 - 10i - 3i + 2}{9 + 4} = \frac{-13 - 13i}{13} = -1 - i.$$

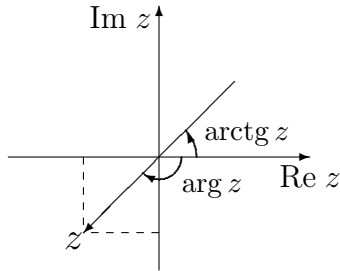
Следовательно, $z = -1 - i$, $\bar{z} = -1 + i$, $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -1$,
 $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{2}$.

$$\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 1.$$

Так как z лежит в III четверти, то

$$\arg z = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} z &= \{\arg z + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, \dots\} = \\ &= \{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, \dots\}. \end{aligned}$$



Ответ: $z = -1 - i$, $\bar{z} = -1 + i$, $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -1$, $|z| = \sqrt{2}$,
 $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} z = \{-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

2. Решить уравнение: $4 \cos z = 5$.

Решение. Воспользовавшись формулой $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, получим уравнение

$$2e^{iz} + 2e^{-iz} = 5 \quad \text{или} \quad 2e^{2iz} - 5e^{iz} + 2 = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно величины e^{iz} , поэтому $e^{iz} = \frac{1}{2}$ или $e^{iz} = 2$, откуда $z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \frac{1}{2}$ или $z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} 2$.

По определению $\text{Ln } a = \ln |a| + i \text{Arg } a$ будем иметь

$$\text{Ln} \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2} + i \text{Arg} \frac{1}{2} = -\ln 2 + i2\pi k \quad \text{и}$$

$$\text{Ln } 2 = \ln 2 + i \text{Arg } 2 = \ln 2 + i2\pi k, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \dots$$

Окончательно $z = 2\pi k - \frac{1}{i} \ln 2 = 2\pi k + i \ln 2$ или $z = 2\pi k + \frac{1}{i} \ln 2 = 2\pi k - i \ln 2$, где $k = 0, \pm 1, \dots$

Ответ: $\{2\pi k + i \ln 2, 2\pi k - i \ln 2 \mid k = 0, \pm 1, \dots\}$ — множество решений исходного уравнения.

3. Найти и изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению:

$$\text{Re} \frac{z-2}{z+i} \leq 0.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+i} &= \frac{x+iy-2}{x+iy+i} = \frac{(x-2+iy)(x-iy-i)}{x^2+(y+1)^2} = \\ &= \frac{x^2-2x+y^2+y+i(-xy-x+2y+2+xy)}{x^2+(y+1)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому $\text{Re} \frac{z-2}{z+i} = \frac{x^2-2x+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} \leq 0.$

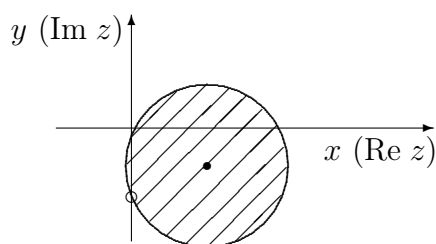
Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + y \leq 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Первое соотношение перепишем в виде $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq 0$ или $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{5}{4}.$

Это неравенство задает круг радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке $(1; -\frac{1}{2})$.

Условие $x^2 + (y+1)^2 \neq 0$ равносильно тому, что $(x; y) \neq (0; -1)$.



Ответ: искомое множество — круг радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке $(1; -\frac{1}{2})$ вместе с границей, за исключением точки $(0; -1)$.

4. Определить, сходится ли последовательность $\{z_n\}$, и если сходится, то найти ее предел.

$$z_n = n^2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2} + i \frac{n^3}{n^3 + n^2 + 1}$$

Решение. Так как сходимость $\{z_n\}$ эквивалентна одновременно сходимости $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$, то рассмотрим отдельно каждую из этих последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 2 \in \mathbb{R}, \quad \text{т.е. } \{\operatorname{Re} z_n\} \text{ — сходится.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 1 \in \mathbb{R}, \quad \text{т.е. } \{\operatorname{Im} z_n\} \text{ — сходится.}$$

Следовательно $\{z_n\}$ — сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = 2 + i$

Ответ: $\{z_n\}$ — сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2 + i$.

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{3^n} + i \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

Решение. Так как сходимость (абсолютная сходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ эквивалентна одновременной сходимости (абсолютной сходимости) рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$, то исследуем на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^3}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

то этот ряд сходится абсолютно. Так как $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — не сходится абсолютно, поэтому и исходный ряд не сходится

абсолютно. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — знакочередующийся и модуль общего члена $\frac{1}{n}$

монотонно стремится к нулю, следовательно, по признаку Лейбница этот ряд сходится. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{3^n} + i \frac{(-1)^n}{n} \right)$ сходится, но не абсолютно.

6. Найти образ кривой γ относительно дробно-линейного отображения L , удовлетворяющего заданным условиям:

$$\gamma : |z - i| = 2, L(2 - i) = 0, L(2 + i) = \infty, L(\infty) = 1.$$

Решение. Найдем вначале дробно-линейное отображение.

Так как $L(2 - i) = 0$, то числитель пропорционален двучлену $(z - 2 + i)$.

Так как $L(2 + i) = \infty$, то знаменатель пропорционален двучлену $(z - 2 - i)$.

Таким образом, L имеет вид $L(z) = a \frac{z - 2 + i}{z - 2 - i}$, где коэффициент a найдем из условия

$$\lim_{z \rightarrow \infty} a \frac{z - 2 + i}{z - 2 - i} = \lim_{z \rightarrow \infty} a \frac{1 - \frac{2}{z} + \frac{i}{z}}{1 - \frac{2}{z} - \frac{i}{z}} = a = 1.$$

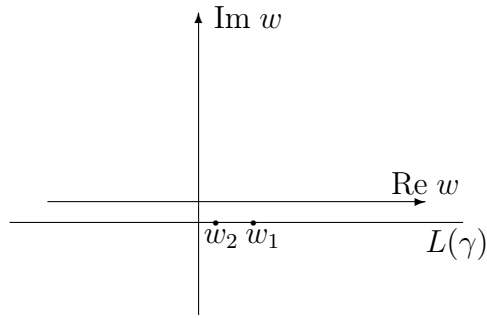
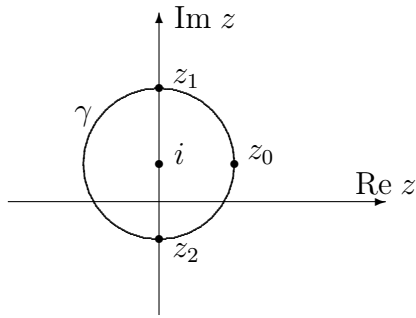
Окончательно получили, что $L(z) = \frac{z - 2 + i}{z - 2 - i}$.

Кривая γ есть окружность радиуса 2 с центром в точке i , поэтому в силу кругового свойства $L(\gamma)$ есть окружность или прямая. Так как точка $z_0 = 2 + i$, в которой $L(z)$ обращается в ∞ , принадлежит γ ($|(2 + i) - i| = 2$), то $L(\gamma)$ — прямая. Чтобы найти прямую, достаточно найти две ее точки.

Возьмем $z_1, z_2 \in \gamma$, например $z_1 = 3i$, а $z_2 = -i$. Тогда

$$\begin{aligned} w_1 = L(z_1) &= \frac{3i - 2 + i}{3i - 2 - i} = \frac{4i - 2}{2i - 2} = \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}, \\ w_2 = L(z_2) &= \frac{-i - 2 + i}{-i - 2 - i} = \frac{-2}{-2 - 2i} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $L(\gamma)$ — прямая, проходящая через точки w_1 и w_2 , задающаяся соотношением $\operatorname{Im} w = -\frac{1}{2}$.



Ответ: $L(\gamma)$ — прямая $\text{Im } w = -\frac{1}{2}$.

7. Установить, сходится ли указанный ряд в точках z_1 и z_2 , указать на комплексной плоскости круг сходимости и эти точки.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{(2+i\frac{3}{2})^n} (z-2i-1)^n, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -1-i.$$

Решение. Найдем радиус круга сходимости этого степенного ряда:

$$R^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+i}{(2+i\frac{3}{2})^n} \right|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|n+i|}}{|2+i\frac{3}{2}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{n^2+1}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

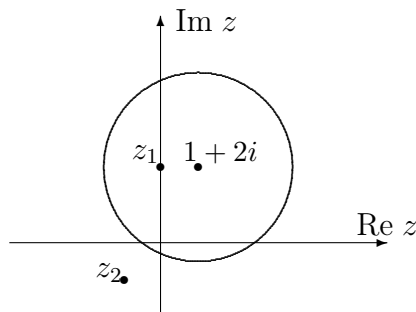
Итак, $R = \frac{5}{2}$. Определим, принадлежит ли z_1 и z_2 кругу сходимости:

$$|z_1 - 2i - 1| = |2i - 2i - 1| = 1 < \frac{5}{2}.$$

Значит, z_1 лежит внутри круга сходимости, и ряд в этой точке сходится.

$$|z_2 - 2i - 1| = |-1-i-2i-1| = |-2-3i| = \sqrt{13} > \frac{5}{2}.$$

Значит, z_2 лежит вне круга сходимости и ряд в этой точке расходится.



Ответ: в точке z_1 указанный ряд сходится, а в точке z_2 — расходится.

Замечание: в данном примере для нахождения радиуса сходимости можно было воспользоваться другой формулой, являющейся следствием признака Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \text{где } a_n = \frac{n+i}{\left(2+i\frac{3}{2}\right)^n}.$$

9. Установить с помощью теоремы Коши–Римана, является ли аналитической следующая функция:

$$f(z) = \bar{z}^2 z.$$

Решение. Имеем

$$\bar{z}^2 z = (x - iy)^2(x + iy) = (x - iy)(x^2 + y^2) = x(x^2 + y^2) - iy(x^2 + y^2),$$

так что $u(x; y) = x^3 + xy^2$, а $v(x; y) = -x^2y - y^3$. Так как $u(x; y)$ и $v(x; y)$ многочлены, то эти функции дифференцируемы во всех точках, поэтому качественные условия теоремы Коши–Римана выполнены.

Количественные условия Коши–Римана

$$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \text{в этом случае имеют вид} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 = -x^2 - 3y^2, \\ 2xy = 2xy \end{cases}$$

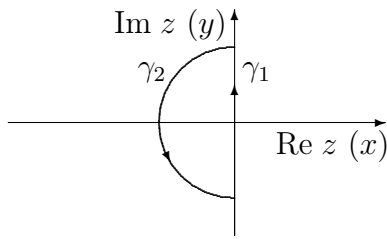
или $4x^2 + 4y^2 = 0$ и удовлетворяются только точке $(0; 0)$. Следовательно, функция $f(z) = \bar{z}^2 \cdot z$ дифференцируема только в точке и нигде не аналитична.

Ответ: функция $f(z) = \bar{z}^2 z$ нигде не аналитична.

10. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз:

$$\int_{\gamma} |z| z^2 dz, \quad \text{где } \gamma \text{ — граница области } |z| \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Решение. Разобьем контур γ на две части: γ_1 — прямолинейный отрезок, лежащий на оси y от 2 до 2 , и γ_2 — половина дуги окружности. Тогда



$$\int_{\gamma} |z|z^2 dz = \int_{\gamma_1} |z|z^2 dz + \int_{\gamma_2} |z|z^2 dz.$$

На кривой γ_1 $z = iy$, где $-2 \leq y \leq 2$, значит, $dz = idy$ и

$$\int_{\gamma_1} |z|z^2 dz = \int_{-2}^2 |iy|(iy)^2 idy = -2i \int_0^2 y^3 dy = -i \frac{y^4}{2} \Big|_0^2 = -8i.$$

На кривой γ_2 $z = 2e^{i\varphi}$, где $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, значит, $dz = 2e^{i\varphi} id\varphi$ и

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} |z|z^2 dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |2e^{i\varphi}|(2e^{i\varphi})^2 2e^{i\varphi} id\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |2e^{i\varphi}|16ie^{3i\varphi} d\varphi = \frac{16}{3} e^{3i\varphi} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= \frac{16}{3} \left(e^{i\frac{9}{2}\pi} - e^{i\frac{3}{2}\pi} \right) = \frac{32}{3} i. \end{aligned}$$

Итак, $\int_{\gamma} |z|z^2 dz = -8i + \frac{32i}{3} = \frac{8i}{3}.$

Ответ: $\int_{\gamma} |z|z^2 dz = \frac{8i}{3}.$

11. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегает в положительном направлении один раз:

а) $\int_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz.$

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Коши. Внутри круга $|z - 2i| \leq 1$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0 = 2i$. Для применения интегральной формулы Коши перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{(z - 2i)z} dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\frac{\cos^2 z}{z}}{z - 2i} dz.$$

Здесь $z_0 = 2i$ и функция $f(z) = \frac{\cos^2 z}{z}$ аналитична в круге $|z - 2i| < 1$, поэтому

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \frac{\cos^2(2i)}{2i} = \pi \cos^2(2i) = \pi \operatorname{ch}^2(2).$$

Ответ:
$$\int_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz = \pi \operatorname{ch}^2(2).$$

Замечание: данный интеграл можно вычислить с помощью теоремы о вычетах.

б)
$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2)(z+2i)} dz.$$

Решение. Так как внутри круга $|z| \leq 3$ подынтегральная функция имеет особенности лишь в точках 2 и $2i$, то по теореме о вычетах

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-2i} f(z) \right), \quad \text{где } f(z) = \frac{\sin z}{(z-2)(z+2i)}.$$

Числитель функции $f(z)$ в точках 2 и $-2i$ в нуль не обращается, а для знаменателя эти точки являются нулями первого порядка (сам знаменатель обращается в нуль в этих точках, а его производная — нет). Поэтому обе точки — полюса первого порядка для $f(z)$. Применяя формулу для вычисления вычета относительно полюса известного порядка, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\sin z(z-2)}{(z-2)(z+2i)} = \frac{\sin 2}{2+2i} = \frac{\sin 2}{2} - i \frac{\sin 2}{2}, \\ \operatorname{Res}_{z=-2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{\sin z(z+2i)}{(z-2)(z+2i)} = \frac{\sin(-2i)}{-2-2i} = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + i \frac{\operatorname{sh} 2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{\sin 2}{2} - i \frac{\sin 2}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + i \frac{\operatorname{sh} 2}{2} \right) = \pi(\sin 2 - \operatorname{sh} 2 + i \sin 2 + i \operatorname{sh} 2).$$

Ответ:
$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2)(z+2i)} dz = \pi(\sin 2 - \operatorname{sh} 2 + i \sin 2 + i \operatorname{sh} 2).$$

в)
$$\int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i} dz.$$

Решение. Так как внутри круга $|z| \leq 3$ подынтегральная функция имеет особенность лишь в точке i , то по теореме о вычетах

$$\int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left(z^2 \sin \frac{1}{z-i} \right).$$

Поскольку функция $\sin \frac{1}{z-i}$ не имеет предела при $z \rightarrow i$, то i — существенно особая точка. Поэтому интересующий нас вычет можно найти, разложив подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности точки i (т.е. по степеням $(z-i)$) и взяв коэффициент при степени -1 . Для разложения $\sin \frac{1}{z-i}$ в ряд по степеням $(z-i)$ можно воспользоваться стандартным разложением

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Тогда

$$\sin \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^3 3!} + \frac{1}{(z-i)^5 5!} - \dots$$

Учитывая, что $z^2 = ((z-i) + i)^2 = (z-i)^2 + 2i(z-i) - 1$, получим

$$\begin{aligned} z^2 \sin \frac{1}{z-i} &= ((z-i)^2 + 2i(z-i) - 1) \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^3 3!} + \dots \right) = \\ &= \left((z-i) - \frac{1}{(z-i) 3!} + \dots \right) + 2i \left(1 - \frac{1}{(z-i)^2 3!} + \dots \right) - 1 \left(\frac{1}{z-i} - \dots \right) = \\ &= (z-i) + 2i + \frac{1}{z-i} \left(-\frac{1}{3!} - 1 \right) + \dots = (z-i) + 2i - \frac{7}{6(z-i)} + \dots, \end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{Res}_{z=i} \left(z^2 \sin \frac{1}{z-i} \right) = -\frac{7}{6}$ и, следовательно, $\int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i \left(-\frac{7}{6} \right) = -\frac{7\pi i}{3}$.

Ответ: $\int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i} dz = -\frac{7\pi i}{3}$.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

I. Число z записать в алгебраической форме.

Найти \bar{z} , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$.

$$1. \quad z = \frac{2 + 4i}{3 + i}$$

$$2. \quad z = \frac{3 - i}{2 + i}$$

$$3. \quad z = \frac{-1 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 4i}$$

$$4. \quad z = \frac{5 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 2i}$$

$$5. \quad z = \frac{-7 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3} + i}$$

$$6. \quad z = \frac{-10 + 6\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - 7i}$$

$$7. \quad z = \frac{7 + 3i}{5 + 2i}$$

$$8. \quad z = \frac{-1 - 5i}{3 + 2i}$$

$$9. \quad z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{-4 + \sqrt{3}i}$$

$$10. \quad z = \frac{-9 + \sqrt{3}i}{3 + 2\sqrt{3}i}$$

$$11. \quad z = \frac{1 - 3i}{1 + 2i}$$

$$12. \quad z = \frac{-5 + \sqrt{3}i}{2 + \sqrt{3}i}$$

$$13. \quad z = \frac{3 + i}{2 + 4i}$$

$$14. \quad z = \frac{2 + i}{3 - i}$$

$$15. \quad z = \frac{\sqrt{3} + 4i}{-1 + 5\sqrt{3}i}$$

$$16. \quad z = \frac{\sqrt{3} + 2i}{-5 + \sqrt{3}i}$$

$$17. \quad z = \frac{2\sqrt{3} + i}{-7 + \sqrt{3}i}$$

$$18. \quad z = \frac{\sqrt{3} + 6\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - 7i}$$

$$19. \quad z = \frac{5 + 2i}{7 + 3i}$$

$$20. \quad z = \frac{3 + 2i}{1 + 5i}$$

$$21. \quad z = \frac{-4 + \sqrt{3}i}{7 + \sqrt{3}i}$$

$$22. \quad z = \frac{3 + 2\sqrt{3}i}{-9 + \sqrt{3}i}$$

$$23. \quad z = \frac{1 + 2i}{1 - 3i}$$

$$24. \quad z = \frac{2 + \sqrt{3}i}{-5 + \sqrt{3}i}$$

II. Решить уравнение.

$$1. \quad e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$$

$$2. \quad z^5 + 8(\sqrt{3}i - 1)z^4 = 0$$

$$3. \quad 3 \cos z = 5$$

$$4. \quad (z - 1)(2z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 0$$

$$5. \quad 3 \sin z = -4i$$

$$6. \quad z^6 + 26z^3 - 27 = 0$$

$$7. \quad e^z - 1 - 6e^{-z} = 0$$

$$8. \quad z^4 + z^3 - 8iz - 8i = 0$$

$$9. \quad \operatorname{tg} z + 2i = 0$$

$$10. \quad z^8 + 15z^4 - 16 = 0$$

$$11. \quad e^{2z} - 2e^z - 3 = 0$$

$$12. \quad z^4 - z^3 + 32\sqrt{2}(z - i + iz - 1) = 0$$

$$13. \quad 3 \cos z = -5$$

$$14. \quad z^6 + 63iz^3 + 64 = 0$$

$$15. \quad 3 \sin z = 4i$$

$$16. \quad \sqrt{2}z^4 - \sqrt{2}z^3 + 8(1 - i)z - 8(1 - i) = 0$$

$$17. \quad e^z + 1 - 6e^{-z} = 0$$

$$18. \quad z^6 - 26z^3 - 27 = 0$$

$$19. \quad \operatorname{tg} z + 3i = 0$$

$$20. \quad z^4 + z^3 + 8iz + 8i = 0$$

$$21. \quad 4 \sin z = 2i$$

$$22. \quad z^5 - 8(\sqrt{3}i - 1)z^4 = 0$$

$$23. \quad e^z + 3 - 2e^{-z} = 0$$

$$24. \quad z^8 - 15z^4 - 16 = 0$$

III. Найти и изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению:

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\operatorname{Re} \frac{z+2i}{z+i} > 0$ | 2. $\operatorname{Im} \frac{z+4i}{z+i} < 0$ | 3. $\operatorname{Re} \frac{z-2i}{z+4} > 0$ |
| 4. $\operatorname{Im} \frac{z-3i}{z+i} \leq 0$ | 5. $\operatorname{Re} \frac{z-2i}{z+1} \geq 0$ | 6. $\operatorname{Im} \frac{z-i}{z+2i} \leq 0$ |
| 7. $\operatorname{Re} \frac{z+2i}{z+i} \leq 0$ | 8. $\operatorname{Im} \frac{z+4i}{z+i} \geq 0$ | 9. $\operatorname{Re} \frac{z-3i}{z+4} \leq 0$ |
| 10. $\operatorname{Re} \frac{z+4i}{z+i} < 0$ | 11. $\operatorname{Im} \frac{z+4i}{z+i} \leq 0$ | 12. $\operatorname{Re} \frac{z-3i}{z+1} \leq 0$ |
| 13. $\operatorname{Im} \frac{z-i}{z+2i} > 0$ | 14. $\operatorname{Re} \frac{z-i}{z+2i} \geq 0$ | 15. $\operatorname{Im} \frac{z+2i}{z+i} \geq 0$ |
| 16. $\operatorname{Re} \frac{z-2i}{z+1} < 0$ | 17. $\operatorname{Im} \frac{z-2i}{z+1} \geq 0$ | 18. $\operatorname{Re} \frac{z-i}{z+4} < 0$ |
| 19. $\operatorname{Im} \frac{z+2i}{z+i} < 0$ | 20. $\operatorname{Re} \frac{z+4i}{z+i} \geq 0$ | 21. $\operatorname{Im} \frac{z-3i}{z+i} > 0$ |
| 22. $\operatorname{Re} \frac{z-3i}{z+i} > 0$ | 23. $\operatorname{Im} \frac{z-2i}{z+1} < 0$ | 24. $\operatorname{Im} \frac{z-2i}{z+4} < 0$ |

IV. Определить, сходится ли последовательность $\{z_n\}$, и если сходится, то найти ее предел.

- | | |
|--|--|
| 1. $z_n = \left(\frac{n}{n+5}\right)^n + in \sin \frac{3}{n^2}$ | 2. $z_n = \frac{\cos n^3}{2^n} - i \frac{3n}{6n+1}$ |
| 3. $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + i \frac{(-1)^n}{n^2}$ | 4. $z_n = n^2 \sin \frac{4}{n^2} + i \frac{n^2+1}{2n^2-n}$ |
| 5. $z_n = \frac{\cos 2n}{n} + i \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ | 6. $z_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + i \frac{\cos 3n}{3n+1}$ |
| 7. $z_n = \operatorname{arctg} \frac{n^2}{n^2+1} + i \frac{(-1)^n n}{n^3+2}$ | 8. $z_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n^2} + i \frac{n^2}{3n^2+1}$ |

$$9. \quad z_n = n \sin \frac{2}{n} + i \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$11. \quad z_n = \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^3} + i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n+1}$$

$$13. \quad z_n = \frac{\sqrt{n^3 + 2n} + 1}{n+1} + in \sin \frac{2}{n}$$

$$15. \quad z_n = \left(\frac{n-2}{n} \right)^n + i \frac{\sqrt[3]{n^2 + \sqrt{n^3}}}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

$$17. \quad z_n = \frac{n^2 + n + 1}{1 - n - n^2} + i \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$19. \quad z_n = n \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + i \frac{n!}{(n-1)! - n!}$$

$$21. \quad z_n = \frac{n^3 - 2n}{1 + 3n^3} + i \frac{\sin 2n}{n}$$

$$23. \quad z_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{3n + 2} + i \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$10. \quad z_n = \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1} + in(e^{\frac{1}{n}} + 1)$$

$$12. \quad z_n = \sqrt{n^2 + n} - n + i \frac{2^n + 3}{5 - 2^n}$$

$$14. \quad z_n = \frac{n - 2n^2}{1 - n^2} + i \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$16. \quad z_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} + i \frac{3n + 2}{2n + 3}$$

$$18. \quad z_n = n(\sqrt{n^2 + 3} - n) + i \frac{n^2}{3} \sin \frac{1}{n^2}$$

$$20. \quad z_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n} + i \frac{n^2 + 2}{6 - 2^n}$$

$$22. \quad z_n = \sqrt{n^2 + n} - n + i \frac{2^n + 3}{6 - 2^n}$$

$$24. \quad z_n = \frac{n - 3n^2}{1 - 2n^n} + i \sqrt{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$$

V. Исследовать ряд на сходимость.

$$1. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + i \frac{n^2}{2^n} \right)$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^3 + 1} + i \frac{n^2 + 1}{3^n} \right)$$

$$3. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 2}} + i \frac{(-1)^n}{4^n} \right)$$

$$4. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + i \frac{n^3}{2^n + 1} \right)$$

$$5. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(0,9^n + i \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

$$6. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$$

$$7. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n}{5^n} + i \sin \frac{1}{n^2} \right)$$

$$8. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} - 1 + i \frac{n}{n^2 + 1} \right)$$

$$9. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n^3 + n} + i \frac{\sqrt{n}}{1,5^n} \right)$$

$$10. \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n^4} + i \frac{1,01^n}{n^{100}} \right)$$

- | | |
|--|---|
| 11. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 1}{2^n} + i \frac{n}{n^3 + 1} \right)$ | 12. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{3^n} + i \frac{n + 2}{n^3 + n} \right)$ |
| 13. $\sum_{i=1}^{\infty} \left((-1)^n 0, 25^n + i \sqrt{\frac{n + 2}{n^2 + 3}} \right)$ | 14. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 1}{3^n + n} + i \ln \left(1 + \frac{2}{n^3} \right) \right)$ |
| 15. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 + i \frac{0, 9^n}{n^3 + 2} \right)$ | 16. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{i \frac{2}{n}}}{\sqrt{n^3}}$ |
| 17. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n+1}{n^3} + i \frac{n^2 - n}{5^n} \right)$ | 18. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n - 2}{n^2 + 1} + i \frac{\cos n}{n} \right)$ |
| 19. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{1, 2^n} + i \operatorname{tg} \frac{1}{n^3 + n^2} \right)$ | 20. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1, 02^n}{n^{20}} + i \arcsin \frac{1}{n^5} \right)$ |
| 21. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^3 + 10n^2 + 1} + i \frac{\sin n}{n} \right)$ | 22. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 3^n}{4^n} + i \frac{n - 2}{n^3 + n^2} \right)$ |
| 23. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n + 2}{n^4 + 5}} + i \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}} \right)$ | 24. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^3}{(1 + i)^n}$ |

VI. Найти образ кривой γ относительно дробно-линейного отображения L , удовлетворяющего заданным условиям:

- | | | | |
|--|-------------------|------------------------|------------------|
| 1. $\gamma : z - i = 1,$ | $L(1 - i) = 0,$ | $L(2 + 2i) = \infty,$ | $L(\infty) = 2$ |
| 2. $\gamma : \operatorname{Re} z = 1,$ | $L(2 + 2i) = 0,$ | $L(1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = 1$ |
| 3. $\gamma : z + 1 = 1,$ | $L(-2 - 2i) = 0,$ | $L(-1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = 2$ |
| 4. $\gamma : \operatorname{Im} z = -2,$ | $L(-1 - i) = 0,$ | $L(2 + i) = \infty,$ | $L(\infty) = -1$ |
| 5. $\gamma : z + i = 1,$ | $L(3 + i) = 0,$ | $L(1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = i$ |
| 6. $\gamma : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z,$ | $L(2 + i) = 0,$ | $L(2 + 2i) = \infty,$ | $L(\infty) = 1$ |
| 7. $\gamma : z - 2 = 1,$ | $L(2 + 2i) = 0,$ | $L(1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = -i$ |
| 8. $\gamma : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0,$ | $L(-1 - i) = 0,$ | $L(1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = 2$ |
| 9. $\gamma : z - i = 2,$ | $L(-1 + i) = 0,$ | $L(-1 - i) = \infty,$ | $L(\infty) = -1$ |
| 10. $\gamma : \operatorname{Re} z = -1,$ | $L(-2 - 2i) = 0,$ | $L(-1 + 2i) = \infty,$ | $L(\infty) = i$ |
| 11. $\gamma : z - 1 = 2,$ | $L(-1 + 2i) = 0,$ | $L(1 + 2i) = \infty,$ | $L(\infty) = 1$ |
| 12. $\gamma : \operatorname{Im} z = 1,$ | $L(2 + i) = 0,$ | $L(-2 - 2i) = \infty,$ | $L(\infty) = -2$ |

13. $\gamma : |z + 1| = 2, \quad L(-2 - i) = 0, \quad L(-2 + i) = \infty, \quad L(\infty) = 2$
14. $\gamma : \operatorname{Re} z = 2\operatorname{Im} z, \quad L(1 - 3i) = 0, \quad L(1 + 3i) = \infty, \quad L(\infty) = -1$
15. $\gamma : |z + 2i| = 1, \quad L(-1 - 3i) = 0, \quad L(-1 - 2i) = \infty, \quad L(\infty) = i$
16. $\gamma : 2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0, \quad L(1 + 3i) = 0, \quad L(1 - 2i) = \infty, \quad L(\infty) = 1$
17. $\gamma : |z + 2| = 1, \quad L(3 + i) = 0, \quad L(-2 + i) = \infty, \quad L(\infty) = -2$
18. $\gamma : \operatorname{Re} z = 2, \quad L(-3 + i) = 0, \quad L(-3 - i) = \infty, \quad L(\infty) = -i$
19. $\gamma : |z - 1 - i| = 1, \quad L(2 + 3i) = 0, \quad L(2 + i) = \infty, \quad L(\infty) = -1$
20. $\gamma : \operatorname{Im} z = -1, \quad L(1 + i) = 0, \quad L(1 - i) = \infty, \quad L(\infty) = i$
21. $\gamma : |z - 1 + i| = 1, \quad L(1 - i) = 0, \quad L(2 - i) = \infty, \quad L(\infty) = 1$
22. $\gamma : 2\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z, \quad L(-1 - i) = 0, \quad L(1 - i) = \infty, \quad L(\infty) = -i$
23. $\gamma : |z + 1 + i| = 1, \quad L(2 + 2i) = 0, \quad L(-1 - i) = \infty, \quad L(\infty) = -1$
24. $\gamma : \operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z = 0, \quad L(1 - 2i) = 0, \quad L(2 - i) = \infty, \quad L(\infty) = i$

VII. Установить, сходится ли указанный ряд в точках z_1 и z_2 , указать на комплексной плоскости круг сходимости и эти точки.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{in(z - i + 3)^n}{(n^2 + 1)}, \quad z_1 = \frac{i}{2} - 3, \quad z_2 = 1 + i$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{\sqrt{n}}(z - 1 - i)^n, \quad z_1 = 1 + \frac{2}{3}i, \quad z_2 = -2 - i$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2^n 3^{n+1}}(z - 2 + 4i)^n, \quad z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -3 + 5i$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n + i)^2}(z - \frac{1}{2} - i)^n, \quad z_1 = 1 + \frac{i}{2}, \quad z_2 = -3 - i$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i}{n2^n}(z + 3i)^n, \quad z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 2 + i$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + i)^n}(z - i)^n, \quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -2 + i$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3 + 4i)^n}(z - 2i)^n, \quad z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -5 + i$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}(z - 2 - i)^n, \quad z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2 + 2i$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - i}{2^n}(z - 3 - i)^n, \quad z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -2 + 3i$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n+i}(z-1+2i)^n, \quad z_1 = \frac{3}{4} - 2i, z_2 = -2 - i$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{in}(z+2-i)^n, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i, z_2 = -2 + \frac{1}{2}i$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(3i)^n}(z-1+i)^n, \quad z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} i2^{n+1}3^n(z-2+i)^n, \quad z_1 = i, z_2 = 2 - \frac{6}{7}i$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3i)^2(z+2-i)^n, \quad z_1 = -2 + \frac{1}{3}i, z_2 = 1 + i$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (1-i)n3^{n-1}(z+1-i)^n, \quad z_1 = 1 - i, z_2 = -\frac{5}{4} + i$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^5}(z+i)^n, \quad z_1 = \frac{1}{2} - i, z_2 = 1 + 2i$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2+1}(z-2i)^n, \quad z_1 = 1 + i, z_2 = \frac{1}{4} + 2i$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{2^n}(z-2-i)^n, \quad z_1 = 1 + i, z_2 = 1 + 3i$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n}{2n+i}(z+2i)^n, \quad z_1 = 1 + 2i, z_2 = \frac{1}{3} - 2i$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2i}{4^n}(z+1+2i)^n, \quad z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2i}{n+i}(z-2+i)^n, \quad z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - \frac{1}{2}i$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{\sqrt{n^2+2}}(z-2+i)^n, \quad z_1 = -2 + \frac{3}{4}i, z_2 = 2 - i$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n i}{3^n + n}(z-i)^n, \quad z_1 = 1 - i, z_2 = i - 1$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{(3n+2)^2}, \quad z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, z_2 = i - 1$

VIII. Установить с помощью теоремы Коши–Римана, является ли аналитической следующая функция

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ | 2. $f(z) = \bar{z}^2(2 - i)$ | 3. $f(z) = z\bar{z}$ |
| 4. $f(z) = \bar{z}^2 + z$ | 5. $f(z) = z^2\bar{z}$ | 6. $f(z) = \bar{z}e^z$ |
| 7. $f(z) = \bar{z}^2$ | 8. $f(z) = z + e^z$ | 9. $f(z) = z^2 + 2\bar{z}$ |
| 10. $f(z) = e^{\bar{z}}$ | 11. $f(z) = z\bar{z} + \bar{z}$ | 12. $f(z) = i\bar{z}^2 + \bar{z}$ |
| 13. $f(z) = \bar{z}^2 + iz$ | 14. $f(z) = 2z\bar{z} + z$ | 15. $f(z) = \bar{z} + e^{\bar{z}}$ |
| 16. $f(z) = iz^2 + e^{iz}$ | 17. $f(z) = \bar{z}^2 + 2\bar{z} + 1$ | 18. $f(z) = z + e^{-z}$ |
| 19. $f(z) = z^2 + z\bar{z}$ | 20. $f(z) = e^{\bar{z}} + e^z$ | 21. $f(z) = i\bar{z}^2 + 2\bar{z}$ |
| 22. $f(z) = \bar{z}^2 + i\bar{z}$ | 23. $f(z) = 2z\bar{z} + z$ | 24. $f(z) = \bar{z} + e^{-\bar{z}}$ |

IX. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz,$ | где γ — граница области $ z < 1, \text{Im } z < 0$ |
| 2. $\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz,$ | где γ — граница области $1 < z < 2, \text{Im } z > 0$ |
| 3. $\int_{\gamma} \bar{z} dz,$ | где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$ |
| 4. $\int_{\gamma} z dz,$ | где γ — граница области $ z < 1, \text{Im } z > 0$ |
| 5. $\int_{\gamma} z dz,$ | где γ — граница области $ z < 1, \text{Re } z > 0$ |
| 6. $\int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz,$ | где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1 + i$ |
| 7. $\int_{\gamma} z \bar{z} dz,$ | где γ — граница области $ z < 1, \text{Re } z < 0$ |
| 8. $\int_{\gamma} z^2 dz,$ | где γ — граница области $ z < 3, \text{Im } z < 0$ |
| 9. $\int_{\gamma} \text{Im } z dz,$ | где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 + i$ |
| 10. $\int_{\gamma} z z dz,$ | где γ — граница области $ z < 2, \text{Re } z > 0$ |
| 11. $\int_{\gamma} z\bar{z} dz,$ | где γ — граница области $ z < 3, \text{Re } z < 0$ |
| 12. $\int_{\gamma} (\bar{z} + \text{Re } z) dz$ | где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = -1, z_2 = -2 + i, z_3 = -1 + i$ |

13. $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz$ где γ — граница области $|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0$
14. $\int_{\gamma} (z + \bar{z}) \, dz$ где γ — граница области $|z| < 2, \operatorname{Re} z > 0$
15. $\int_{\gamma} (z + \operatorname{Re} z) \, dz$ где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 - i$
16. $\int_{\gamma} (\bar{z} + \operatorname{Im} z) \, dz$ где γ — граница области $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$
17. $\int_{\gamma} \bar{z} \, dz$ где γ — граница области $|z| < 2, \operatorname{Re} z < 0$
18. $\int_{\gamma} e^{\bar{z}} \, dz$ где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$
19. $\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz$ где γ — граница области $|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0$
20. $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} \, dz$ где γ — граница области $|z| < 2, \operatorname{Re} z > 0$
21. $\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} \, dz$ где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = -1, z_2 = -1 + i, z_3 = 0$
22. $\int_{\gamma} |z^2| \, dz$ где γ — граница области $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$
23. $\int_{\gamma} z|z| \, dz$ где γ — граница области $|z| < 2, \operatorname{Re} z < 0$
24. $\int_{\gamma} z\bar{z} \, dz$ где γ — контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$

Х. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз.

1. а) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{2z} \, dz,$ б) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi)}{(z-2)(z+2i)} \, dz,$ в) $\int_{|z|=2} iz \sin \frac{1}{z+1} \, dz,$
2. а) $\int_{|z+2i|=1} \frac{e^z}{(z+2i)^2(z-2)} \, dz,$ б) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+i)(z-1)} \, dz,$ в) $\int_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z+i}} \, dz,$
3. а) $\int_{|z-1|=1} \frac{z^2+5}{z-1} \, dz,$ б) $\int_{|z|=3} \frac{e^{z+i\pi}}{z^2-1} \, dz,$ в) $\int_{|z|=3} (iz-1) \cos \frac{1}{z+i} \, dz,$
4. а) $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{(z-i)^2 z} \, dz,$ б) $\int_{|z|=2} \frac{\cos(z+\frac{\pi}{2})}{z^2+iz} \, dz,$ в) $\int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{2}{z-1} \, dz,$
5. а) $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin^2(2z)}{z-i} \, dz,$ б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+1} \, dz,$ в) $\int_{|z|=2} (z^2+z) e^{\frac{2}{z-i}} \, dz,$
6. а) $\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(2z)}{(z+1)^2 z} \, dz,$ б) $\int_{|z|=2} \frac{e^{z+i\frac{\pi}{2}}}{(z+1)(z-i)} \, dz,$ в) $\int_{|z|=2} (z^2-z) \cos \frac{2}{z-1} \, dz,$

7. a) $\int_{|z|=2} \frac{\sin(z+\frac{\pi}{2})}{z+1} dz$, б) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi-z)}{(z-2)(z-2i)} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2+1) \sin \frac{1}{z+i} dz$,
8. a) $\int_{|z+i|=1/2} \frac{\cos z}{(z+i)^2 z} dz$, б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin(\pi+z)}{z^2+4} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2+1) e^{\frac{1}{z-i}} dz$,
9. a) $\int_{|z+i|=1} \frac{z^3+1}{z+i} dz$, б) $\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2-4} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2+2zi) \cos \frac{2}{z+1} dz$,
10. a) $\int_{|z-2|=1} \frac{e^{iz}}{(z-2)^2(z+i)} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{\cos(2z+\frac{\pi}{2})}{z^2-3iz-2} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2+iz) \sin \frac{2}{z-i} dz$,
11. a) $\int_{|z+1|=2} \frac{z^3+2}{z^2-z-2} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{\sin(2z)}{z^2+3iz-2} dz$, B) $\int_{|z|=2} (2iz-1) e^{\frac{1}{z-1}} dz$,
12. a) $\int_{|z+2|=1} \frac{\cos(2iz)}{(z+2)^2(z-i)} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz+i\frac{\pi}{2}}}{z^2-z-6} dz$, B) $\int_{|z|=2} (3iz+2) \cos \frac{1}{z+i} dz$,
13. a) $\int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{z^2-1} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{\cos(2z)}{(z-3)(z+i)} dz$, B) $\int_{|z|=2} (i-2z) \sin \frac{1}{z-i} dz$,
14. a) $\int_{|z-2i|=1} \frac{\sin(-2z)}{(z-2i)^2(z+1)} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{\sin(iz+\pi)}{(z+3)(z-i)} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2-iz) e^{2/(z-i)} dz$,
15. a) $\int_{|z+1|=1} \frac{z^2+3}{z^2+1} dz$, б) $\int_{|z|=4} \frac{e^{i\pi-iz}}{(z+i)(z+3)} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z-z^2) \cos \frac{1}{z-i} dz$,
16. a) $\int_{|z+2|=1} \frac{\cos(2z)}{(z+2)^2(z+3i)} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{\cos(\pi-iz)}{(z+4i)(z+i)} dz$, B) $\int_{|z|=2} (2iz-z^2) \sin \frac{1}{z+i} dz$,
17. a) $\int_{|z-i|=1} \frac{z^4}{z^2-3iz-2} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{\sin(2\pi-z)}{(z-4)(z+3i)} dz$, B) $\int_{|z|=2} 2z^2 \cdot e^{2/(z-i)} dz$,
18. a) $\int_{|z+3i|=1} \frac{e^{2z}}{(z+3i)^2 \cdot (z-2)} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{e^{2z-i\pi}}{z^2-iz+12} dz$, B) $\int_{|z|=2} (iz-z^2) \cos \frac{1}{z+i} dz$,
19. a) $\int_{|z-2i|=1/2} \frac{\cos(z+2i)}{z^2+iz+2} dz$, б) $\int_{|z|=3} \frac{\cos z^2}{z^2+3i \cdot z-2} dz$, B) $\int_{|z|=2} 2i \cdot z^2 \cdot \sin \frac{1}{i-z} dz$,
20. a) $\int_{|z-3i|=1} \frac{\sin(3i \cdot z)}{(z-3i)^2(z+2)} dz$, б) $\int_{|z|=3} \frac{\sin^2 z}{z^2-3i \cdot z-2} dz$, B) $\int_{|z|=2} (3i \cdot z+1) e^{2/(1-z)} dz$,
21. a) $\int_{|z+2i|=1} \frac{e^{z+i}}{z^2-iz+2} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2+iz+6} dz$, B) $\int_{|z|=2} (z^2+iz) \cos \frac{2}{i-z} dz$,
22. a) $\int_{|z-4i|=1} \frac{\cos(z-\pi/2)}{(z-4i)^2(z+2)} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{\cos(z+z^2)}{z^2-iz+6} dz$, B) $\int_{|z|=2} (i \cdot z - z^2) \sin \frac{2}{1-z} dz$,
23. a) $\int_{|z+3i|=1} \frac{\sin^2 z}{z^2+9} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{\sin(2z^2)}{z^2-5i \cdot z-6} dz$, B) $\int_{|z|=2} (2z-3i) e^{1/(z+i)} dz$,
24. a) $\int_{|z+4|=1} \frac{e^{2-z}}{(z+4)^2 \cdot (z-i)} dz$, б) $\int_{|z|=5} \frac{e^{iz^2}}{z^2+5i \cdot z-6} dz$, B) $\int_{|z|=2} (2z^2+i \cdot z) \sin \frac{1}{z+i} dz$.