Введение

1. Число z записать в алгебраической форме.
Найти $\overline{z}$, $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\arg z$, $\mathrm{Arg}\, z$.

$$z = \frac{5+i}{-3+2i}.$$

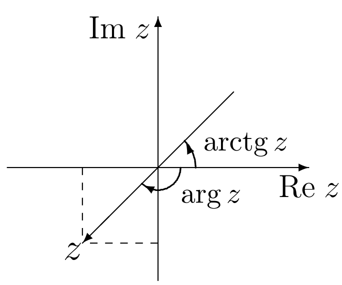
Решение. Умножим и разделим число z на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{5+i}{-3+2i} = \frac{(5+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-15-10i-3i+2}{9+4} = \frac{-13-13i}{13} = -1-i.$$

Следовательно, $z = -1-i, \quad \bar{z} = -1+i, \quad \mathrm{Re}\, z = -1, \quad \mathrm{Im}\, z = -1,$

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\mathrm{tg}(\arg z) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = 1.$$



Так как z лежит в III четверти, то

$$\arg z = \mathrm{arctg}\, 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}\ ,$$
$$\mathrm{Arg}\, z = \{\arg z + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, ...\} =$$
$$= \{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, ...\}.$$

Ответ: $z = -1-i,\ \bar{z} = -1+i,\ \mathrm{Re}\, z = -1,\ \mathrm{Im}\, z = -1,\ |z| = \sqrt{2},$
$\arg z = -\dfrac{3\pi}{4},\ \mathrm{Arg}\, z = \{-\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

2. Решить уравнение: $4\cos\ z = 5.$

Решение. Воспользовавшись формулой $\cos\ z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, получим уравнение

$$2e^{iz} + 2e^{-iz} = 5 \quad \text{или} \quad 2e^{2iz} - 5e^{iz} + 2 = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно величины e^{iz}, поэтому $e^{iz} = \frac{1}{2}$ или $e^{iz} = 2$, откуда $z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$ или $z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}2.$

По определению $\text{Ln}\ a = \ln|a| + i\text{Arg}\ a$ будем иметь

$$\text{Ln}\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{2} + i\text{Arg}\frac{1}{2} = -\ln\ 2 + i2\pi k \quad \text{и}$$
$$\text{Ln}\ 2 = \ln 2 + i\text{Arg}\ 2 = \ln 2 + i2\pi k, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \cdots$$

Окончательно $z = 2\pi k - \frac{1}{i}\ln 2 = 2\pi k + i\ln\ 2$ или $z = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln 2 = 2\pi k - i\ln\ 2$, где $k = 0, \pm 1, ...$

Ответ: $\{2\pi k + i\ln 2, 2\pi k - i\ln 2 \mid k = 0, \pm 1, ...\}$ — множество решений исходного уравнения.

3. Найти и изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению:

$$\text{Re}\frac{z-2}{z+i} \leqslant 0.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\frac{z-2}{z+i} = \frac{x+iy-2}{x+iy+i} = \frac{(x-2+iy)(x-iy-i)}{x^2+(y+1)^2} =$$
$$= \frac{x^2-2x+y^2+y+i(-xy-x+2y+2+xy)}{x^2+(y+1)^2}.$$

Поэтому $\quad \text{Re}\ \dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{x^2-2x+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} \leqslant 0.$

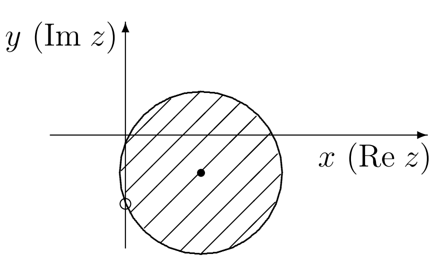
Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2+y \leqslant 0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Первое соотношение перепишем в виде $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leqslant 0$ или $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}$.

Это неравенство задает круг радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

Условие $x^2 + (y+1)^2 \neq 0$ равносильно тому, что $(x; y) \neq (0; -1)$.



Ответ: искомое множество — круг радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ вместе с границей, за исключением точки $(0; -1)$.

4. Определить, сходится ли последовательность $\{z_n\}$, и если сходится, то найти ее предел.

$$z_n = n^2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2} + i \frac{n^3}{n^3 + n^2 + 1}$$

Решение. Так как сходимость $\{z_n\}$ эквивалентна одновременно сходимости $\{\mathrm{Re}\ z_n\}$ и $\{\mathrm{Im}\ z_n\}$, то рассмотрим отдельно каждую из этих последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 2 \in \mathbb{R}, \quad \text{т.е.} \{\mathrm{Re}\ z_n\} \text{ — сходится.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 + n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 1 \in \mathbb{R}, \quad \text{т.е. } \{\mathrm{Im}\ z_n\} \text{ — сходится.}$$

Следовательно $\{z_n\}$ — сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = 2 + i$

Ответ: $\{z_n\}$ — сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2 + i$.

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{3^n} + i \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

Решение. Так как сходимость (абсолютная сходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ эквивалентна одновременной сходимости (абсолютной сходимости) рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\ z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\ z_n$, то исследуем на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Применим признак Коши к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^3}{3^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

то этот ряд сходится абсолютно. Так как $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — не сходится абсолютно, поэтому и исходный ряд не сходится абсолютно. Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — знакочередующийся и модуль общего члена $\frac{1}{n}$

монотонно стремится к нулю, следовательно, по признку Лейбница этот ряд сходится. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3}{3^n}+i\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ сходится, но не абсолютно.

6. Найти образ кривой γ относительно дробно–линейного отображения L, удовлетворяющего заданным условиям:

$$\gamma : |z-i| = 2, L(2-i) = 0,\ L(2+i) = \infty,\ L(\infty) = 1.$$

Решение. Найдем вначале дробно–линейное отображение.

Так как $L(2-i) = 0$, то числитель пропорционален двучлену $(z-2+i)$.

Так как $L(2+i) = \infty$, то знаменатель пропорционален двучлену $(z-2-i)$. Таким образом, L имеет вид $L(z) = a\dfrac{z-2+i}{z-2-i}$, где коэффициент a найдем из условия

$$\lim_{z\to\infty} a\frac{z-2+i}{z-2-i} = \lim_{z\to\infty} a\frac{1-\frac{2}{z}+\frac{i}{z}}{1-\frac{2}{z}-\frac{i}{z}} = a = 1.$$

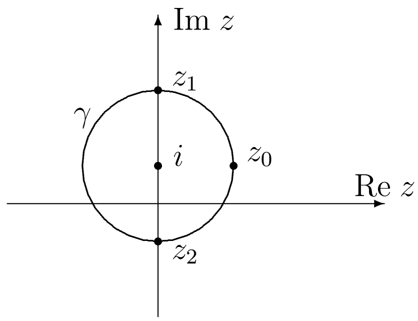
Окончательно получили, что $L(z) = \dfrac{z-2+i}{z-2-i}$.

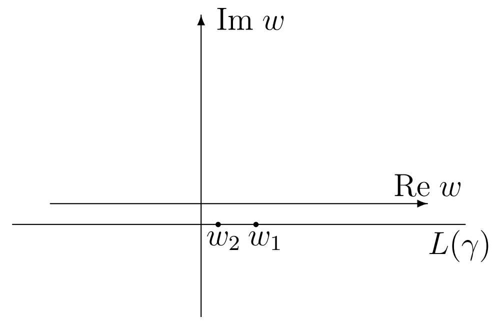
Кривая γ есть окружность радиуса 2 с центром в точке i, поэтому в силу кругового свойства $L(\gamma)$ есть окружность или прямая. Так как точка $z_0 = 2+i$, в которой $L(z)$ обращается в ∞, принадлежит $\gamma(|(2+i)-i|) = 2$, то $L(\gamma)$ — прямая. Чтобы найти прямую, достаточно найти две ее точки.

Возьмем $z_1, z_2 \in \gamma$, например $z_1 = 3i$, а $z_2 = -i$. Тогда

$$w_1 = L(z_1) = \frac{3i-2+i}{3i-2-i} = \frac{4i-2}{2i-2} = \frac{1-2i}{1-i} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2},$$
$$w_2 = L(z_2) = \frac{-i-2+i}{-i-2-i} = \frac{-2}{-2-2i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Таким образом, $L(\gamma)$ — прямая, проходящая через точки w_1 и w_2, задающаяся соотношением $\operatorname{Im} w = -\dfrac{1}{2}$.





Ответ: $L(\gamma)$ — прямая Im $w = -\dfrac{1}{2}$.

7. Установить, сходится ли указанный ряд в точках z_1 и z_2, указать на комплексной плоскости круг сходимости и эти точки.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{\left(2+i\frac{3}{2}\right)^n}(z-2i-1)^n, \quad z_1 = 2i, \;\; z_2 = -1-i.$$

Решение. Найдем радиус круга сходимости этого степенного ряда:

$$R^{-1} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n+i}{\left(2+i\frac{3}{2}\right)^n}\right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|n+i|}}{\left|2+i\frac{3}{2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n^2+1}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

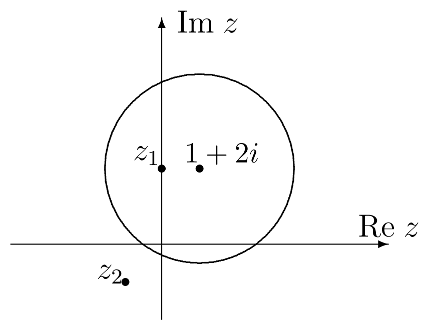
Итак, $R = \frac{5}{2}$. Определим, принадлежит ли z_1 и z_2 кругу сходимости:

$$|z_1 - 2i - 1| = |2i - 2i - 1| = 1 < \frac{5}{2}.$$

Значит, z_1 лежит внутри круга сходимости, и ряд в этой точке сходится.

$$|z_2 - 2i - 1| = |-1-i-2i-1| = |-2-3i| = \sqrt{13} > \frac{5}{2}.$$

Значит, z_2 лежит вне круга сходимости и ряд в этой точке расходится.



Ответ: в точке z_1 указанный ряд сходится, а в точке z_2 — расходится.

Замечание: в данном примере для нахождения радиуса сходимости можно было воспользоваться другой формулой, являющейся следтвием признака Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \text{где} \;\; a_n = \frac{n+i}{\left(2+i\frac{3}{2}\right)^n}.$$

9. Установить с помощью теоремы Коши–Римана, является ли аналитической следующая функция:

$$f(z) = \overline{z}^{\,2} z.$$

Решение. Имеем

$$\overline{z}^{\,2} z = (x-iy)^2(x+iy) = (x-iy)(x^2+y^2) = x(x^2+y^2) - iy(x^2+y^2),$$

так что $u(x;y) = x^3 + xy^2$, а $v(x;y) = -x^2y - y^3$. Так как $u(x;y)$ и $v(x;y)$ многочлены, то эти функции дифференцируемы во всех точках, поэтому качественные условия теоремы Коши–Римана выполнены.

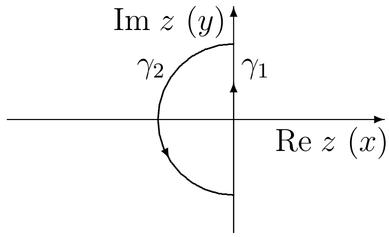
Количественные условия Коши–Римана
$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ в этом случае имеют вид $\begin{cases} 3x^2+y^2 = -x^2-3y^2, \\ 2xy = 2xy \end{cases}$
или $4x^2+4y^2=0$ и удовлетворяются только точке $(0;0)$. Следовательно, функция $f(z) = \overline{z}^{\,2}\cdot z$ дифференцируема только в точке и нигде не аналитична.

Ответ: функция $f(z) = \overline{z}^{\,2} z$ нигде не аналитична.

10. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз:

$\int\limits_\gamma |z|z^2dz$, где γ — граница области $|z| \leqslant 2, \operatorname{Re} z \leqslant 0$.

Решение. Разобьем контур γ на две части: γ_1 — прямолинейный отрезок, лежащий на оси y от 2 до 2, и γ_2 — половина дуги окружности. Тогда



$$\int\limits_{\gamma} |z|z^2dz = \int\limits_{\gamma_1} |z|z^2dz + \int\limits_{\gamma_2} |z|z^2dz.$$

На кривой γ_1 $\quad z = iy$, где $-2 \leqslant y \leqslant 2$, значит, $dz = idy$ и

$$\int\limits_{\gamma_1} |z|z^2dz = \int\limits_{-2}^{2} |iy|(iy)^2idy = -2i\int\limits_{0}^{2} y^3dy = -i\frac{y^4}{2}\bigg|_0^2 = -8i.$$

На кривой γ_2 $\quad z = 2e^{i\varphi}$, где $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$, значит, $dz = 2e^{i\varphi}id\varphi$ и

$$\int\limits_{\gamma_2} |z|z^2dz = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |2e^{i\varphi}|(2e^{i\varphi})^2 2e^{i\varphi}id\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |2e^{i\varphi}|16ie^{3i\varphi}d\varphi = \frac{16}{3}e^{3i\varphi}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$
$$= \frac{16}{3}\left(e^{i\frac{9}{2}\pi} - e^{i\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{32}{3}i.$$

Итак, $\int\limits_{\gamma} |z|z^2dz = -8i + \dfrac{32i}{3} = \dfrac{8i}{3}$.

Ответ: $\int\limits_{\gamma} |z|z^2dz = \dfrac{8i}{3}$.

11. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегает в положительном направлении один раз:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi}dz.$

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Коши. Внутри круга $|z-2i| \leqslant 1$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0 = 2i$. Для применения интегральной формулы Коши перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi}\,dz = \int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{(z-2i)z}\,dz = \int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\frac{\cos^2 z}{z}}{z-2i}\,dz.$$

Здесь $z_0 = 2i$ и функция $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{z}$ аналитична в круге $|z-2i| < 1$, поэтому

$$\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \frac{\cos^2(2i)}{2i} = \pi \cos^2(2i) = \pi \operatorname{ch}^2(2).$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 2zi} dz = \pi \operatorname{ch}^2(2).$

Замечание: данный интеграл можно вычислить с помощью теоремы о вычетах.

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\ z}{(z-2)(z+2i)} dz.$

Решение. Так как внутри круга $|z| \leqslant 3$ подынтегральная функция имеет особенности лишь в точках 2 и $2i$, то по теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) \right), \quad \text{где } f(z) = \frac{\sin z}{(z-2(z+2i))}.$$

Числитель функции $f(z)$ в точках 2 и $-2i$ в нуль не обращается, а для знаменателя эти точки являются нулями первого порядка (сам знаменатель обращается в нуль в этих точках, а его производная — нет). Поэтому обе точки — полюса первого порядка для $f(z)$. Применяя формулу для вычисления вычета относительно полюса известного порядка, получим

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{\sin\ z(z-2)}{(z-2)(z+2i)} = \frac{\sin\ 2}{2+2i} = \frac{\sin\ 2}{2} - i\frac{\sin\ 2}{2},$$
$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i} \frac{\sin\ z(z+2i)}{(z-2)(z+2i)} = \frac{\sin\ (-2i)}{-2-2i} = \frac{\operatorname{sh}\ 2}{2} + i\frac{\operatorname{sh}\ 2}{2}.$$

Таким образом,
$\displaystyle\int\limits_{|z|=3} f(z)\ dz = 2\pi i \left(\tfrac{\sin\ 2}{2} - i\tfrac{\sin\ 2}{2} + \tfrac{\operatorname{sh}\ 2}{2} + i\tfrac{\operatorname{sh}\ 2}{2}\right) = \pi(\sin\ 2 - \operatorname{sh}\ 2 + i \sin\ 2 + i\ \operatorname{sh}\ 2).$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\ z}{(z-2)(z+2i)} dz = \pi(\sin\ 2 - \operatorname{sh}\ 2 + i \sin\ 2 + i\ \operatorname{sh}\ 2).$

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} z^2 \sin \tfrac{1}{z-i}\ dz.$

Решение. Так как внутри курга $|z| \leqslant 3$ подынтегральная функция имеет особенность лишь в точке i , то по теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \left(z^2 \sin \frac{1}{z-i} \right).$$

Поскольку функция $\sin \frac{1}{z-i}$ не имеет предела при $z \to i$, то i — существенно особая точка. Поэтому интересующий нас вычет можно найти, разложив подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности точки i (т.е. по степеням $(z-i)$) и взяв коэффициент при степени -1. Для разложения $\sin \dfrac{1}{z-i}$ в ряд по степеням $(z-i)$ можно воспользоваться стандартным разложением
$\sin\, z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + ...$
Тогда
$\sin \dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{(z-i^3)3!} + \dfrac{1}{(z-i)^5 5!} - ...$
Учитывая, что $z^2 = ((z-i)+i)^2 = (z-i)^2 + 2i(z-i) - 1$, получим

$$z^2 \sin \frac{1}{z-i} = ((z-i)^2 + 2i(z-i) - 1) \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^3 3!} + \dots \right) =$$
$$= ((z-i) - \frac{1}{(z-i)3!} + \dots) + 2i(1 - \frac{1}{(z-i)^2 3!} + \dots) - 1 \left(\frac{1}{z-i} - \dots \right) =$$
$$= (z-i) + 2i + \frac{1}{z-i} \left(-\frac{1}{3!} - 1 \right) + \dots = (z-i) + 2i - \frac{7}{6(z-i)} + \dots,$$

поэтому $\operatorname*{Res}_{z=i} \left(z^2 \sin \frac{1}{z-i} \right) = -\frac{7}{6}$ и, следовательно, $\int\limits_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i \left(-\frac{7}{6} \right) = -\frac{7\pi i}{3}$.

Ответ: $\int\limits_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-i}\, dz = -\dfrac{7\pi i}{3}$.

Задания к контрольной работе

I. Число z записать в алгебраической форме.
Найти $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$.

1. $z = \dfrac{2+4i}{3+i}$	2. $z = \dfrac{3-i}{2+i}$	3. $z = \dfrac{-1+5\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+4i}$
4. $z = \dfrac{5+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+2i}$	5. $z = \dfrac{-7+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+i}$	6. $z = \dfrac{-10+6\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-7i}$
7. $z = \dfrac{7+3i}{5+2i}$	8. $z = \dfrac{-1-5i}{3+2i}$	9. $z = \dfrac{7+\sqrt{3}i}{-4+\sqrt{3}i}$
10. $z = \dfrac{-9+\sqrt{3}i}{3+2\sqrt{3}i}$	11. $z = \dfrac{1-3i}{1+2i}$	12. $z = \dfrac{-5+\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}$
13. $z = \dfrac{3+i}{2+4i}$	14. $z = \dfrac{2+i}{3-i}$	15. $z = \dfrac{\sqrt{3}+4i}{-1+5\sqrt{3}i}$
16. $z = \dfrac{\sqrt{3}+2i}{-5+\sqrt{3}i}$	17. $z = \dfrac{2\sqrt{3}+i}{-7+\sqrt{3}i}$	18. $z = \dfrac{\sqrt{3}+6\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-7i}$
19. $z = \dfrac{5+2i}{7+3i}$	20. $z = \dfrac{3+2i}{1+5i}$	21. $z = \dfrac{-4+\sqrt{3}i}{7+\sqrt{3}i}$
22. $z = \dfrac{3+2\sqrt{3}i}{-9+\sqrt{3}i}$	23. $z = \dfrac{1+2i}{1-3i}$	24. $z = \dfrac{2+\sqrt{3}i}{-5+\sqrt{3}i}$

II. Решить уравнение.

1. $e^{2z}+2e^{z}-3=0$	2. $z^5+8(\sqrt{3}i-1)z^4=0$
3. $3\cos z=5$	4. $(z-1)(2z^3+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)=0$
5. $3\sin z=-4i$	6. $z^6+26z^3-27=0$
7. $e^{z}-1-6e^{-z}=0$	8. $z^4+z^3-8iz-8i=0$
9. $\operatorname{tg} z+2i=0$	10. $z^8+15z^4-16=0$
11. $e^{2z}-2e^{z}-3=0$	12. $z^4-z^3+32\sqrt{2}(z-i+iz-1)=0$
13. $3\cos z=-5$	14. $z^6+63iz^3+64=0$
15. $3\sin z=4i$	16. $\sqrt{2}z^4-\sqrt{2}z^3+8(1-i)z-8(1-i)=0$
17. $e^{z}+1-6e^{-z}=0$	18. $z^6-26z^3-27=0$
19. $\operatorname{tg} z+3i=0$	20. $z^4+z^3+8iz+8i=0$
21. $4\sin z=2i$	22. $z^5-8(\sqrt{3}i-1)z^4=0$
23. $e^{z}+3-2e^{-z}=0$	24. $z^8-15z^4-16=0$

III. Найти и изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению:

1. $\operatorname{Re}\dfrac{z+2i}{z+i} > 0$ 2. $\operatorname{Im}\dfrac{z+4i}{z+i} < 0$ 3. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+4} > 0$

4. $\operatorname{Im}\dfrac{z-3i}{z+i} \leqslant 0$ 5. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+1} \geqslant 0$ 6. $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z+2i} \leqslant 0$

7. $\operatorname{Re}\dfrac{z+2i}{z+i} \leqslant 0$ 8. $\operatorname{Im}\dfrac{z+4i}{z+i} \geqslant 0$ 9. $\operatorname{Re}\dfrac{z-3i}{z+4} \leqslant 0$

10. $\operatorname{Re}\dfrac{z+4i}{z+i} < 0$ 11. $\operatorname{Im}\dfrac{z+4i}{z+i} \leqslant 0$ 12. $\operatorname{Re}\dfrac{z-3i}{z+1} \leqslant 0$

13. $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z+2i} > 0$ 14. $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z+2i} \geqslant 0$ 15. $\operatorname{Im}\dfrac{z+2i}{z+i} \geqslant 0$

16. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+1} < 0$ 17. $\operatorname{Im}\dfrac{z-2i}{z+1} \geqslant 0$ 18. $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z+4} < 0$

19. $\operatorname{Im}\dfrac{z+2i}{z+i} < 0$ 20. $\operatorname{Re}\dfrac{z+4i}{z+i} \geqslant 0$ 21. $\operatorname{Im}\dfrac{z-3i}{z+i} > 0$

22. $\operatorname{Re}\dfrac{z-3i}{z+i} > 0$ 23. $\operatorname{Im}\dfrac{z-2i}{z+1} < 0$ 24. $\operatorname{Im}\dfrac{z-2i}{z+4} < 0$

IV. Определить, сходится ли последовательность $\{z_n\}$, и если сходится, то найти ее предел.

1. $z_n = \left(\dfrac{n}{n+5}\right)^n + in\sin\frac{3}{n^2}$ 2. $z_n = \dfrac{\cos\, n^3}{2^n} - i\,\dfrac{3n}{6n+1}$

3. $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + i\,\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 4. $z_n = n^2\sin\frac{4}{n^2} + i\,\dfrac{n^2+1}{2n^2-n}$

5. $z_n = \dfrac{\cos 2n}{n} + i\,\dfrac{1+2+...+n}{n^2}$ 6. $z_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + i\,\dfrac{\cos 3n}{3n+1}$

7. $z_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2}{n^2+1} + i\,\dfrac{(-1)^n n}{n^3+2}$ 8. $z_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2} + i\,\dfrac{n^2}{3n^2+1}$

9. $z_n = n\sin\dfrac{2}{n} + i\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

10. $z_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^3+1} + in(e^{\frac{1}{n}}+1)$

11. $z_n = \dfrac{n^3-2n}{1-3n^3} + i\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n+1}$

12. $z_n = \sqrt{n^2+n} - n + i\,\dfrac{2^n+3}{5-2^n}$

13. $z_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2n}+1}{n+1} + in\sin\dfrac{2}{n}$

14. $z_n = \dfrac{n-2n^2}{1-n^2} + i\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

15. $z_n = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n + i\,\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}}$

16. $z_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} + i\,\dfrac{3n+2}{2n+3}$

17. $z_n = \dfrac{n^2+n+1}{1-n-n^2} + i\,\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

18. $z_n = n(\sqrt{n^2+3}-n) + i\dfrac{n^2}{3}\sin\frac{1}{n^2}$

19. $z_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + i\,\dfrac{n!}{(n-1)!-n!}$

20. $z_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n} + i\,\dfrac{n^2+2}{6-2^n}$

21. $z_n = \dfrac{n^3-2n}{1+3n^3} + i\,\dfrac{\sin 2n}{n}$

22. $z_n = \sqrt{n^2+n} - n + i\,\dfrac{2^n+3}{6-2^n}$

23. $z_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{3n+2} + i\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

24. $z_n = \dfrac{n-3n^2}{1-2n^n} + i\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

V. Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1} + i\dfrac{n^2}{2^n}\right)$

2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n^3+1} + i\dfrac{n^2+1}{3^n}\right)$

3. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n^2+2}} + i\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)$

4. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\ln(1+\dfrac{1}{n^2}) + i\dfrac{n^3}{2^n+1}\right)$

5. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(0,9^n + i\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

6. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

7. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{5^n} + i\sin\frac{1}{n^2}\right)$

8. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} - 1 + i\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

9. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\mathrm{tg}\,\frac{1}{n^3+n} + i\dfrac{\sqrt{n}}{1,5^n}\right)$

10. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n^4} + i\dfrac{1,01^n}{n^{100}}\right)$

11. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{2^n}+i\dfrac{n}{n^3+1}\right)$

12. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{3^n}+i\dfrac{n+2}{n^3+n}\right)$

13. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left((-1)^n 0,25^n+i\sqrt{\dfrac{n+2}{n^2+3}}\right)$

14. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{2^n+1}{3^n+n}+i\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)\right)$

15. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1+i\dfrac{0,9^n}{n^3+2}\right)$

16. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{2}{n}}}{\sqrt{n^3}}$

17. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sin\frac{n+1}{n^3}+i\dfrac{n^2-n}{5^n}\right)$

18. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-2}{n^2+1}+i\dfrac{\cos n}{n}\right)$

19. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1,2^n}+i\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n^3+n^2}\right)$

20. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1,02^n}{n^{20}}+i\arcsin\frac{1}{n^5}\right)$

21. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n^3+10n^2+1}+i\dfrac{\sin n}{n}\right)$

22. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+3^n}{4^n}+i\dfrac{n-2}{n^3+n^2}\right)$

23. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n^4+5}}+i\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$

24. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(1+i)^n}$

VI. Найти образ кривой γ относительно дробно–линейного отображения L, удовлетворяющего заданным условиям:

1.	$\gamma: \lvert z-i\rvert=1,$	$L(1-i)=0,$	$L(2+2i)=\infty,$	$L(\infty)=2$
2.	$\gamma: \mathrm{Re}\, z=1,$	$L(2+2i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=1$
3.	$\gamma: \lvert z+1\rvert=1,$	$L(-2-2i)=0,$	$L(-1-i)=\infty,$	$L(\infty)=2$
4.	$\gamma: \mathrm{Im}\, z=-2,$	$L(-1-i)=0,$	$L(2+i)=\infty,$	$L(\infty)=-1$
5.	$\gamma: \lvert z+i\rvert=1,$	$L(3+i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=i$
6.	$\gamma: \mathrm{Re}\, z=\mathrm{Im}\, z,$	$L(2+i)=0,$	$L(2+2i)=\infty,$	$L(\infty)=1$
7.	$\gamma: \lvert z-2\rvert=1,$	$L(2+2i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=-i$
8.	$\gamma: \mathrm{Re}\, z+\mathrm{Im}\, z=0,$	$L(-1-i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=2$
9.	$\gamma: \lvert z-i\rvert=2,$	$L(-1+i)=0,$	$L(-1-i)=\infty,$	$L(\infty)=-1$
10.	$\gamma: \mathrm{Re}\, z=-1,$	$L(-2-2i)=0,$	$L(-1+2i)=\infty,$	$L(\infty)=i$
11.	$\gamma: \lvert z-1\rvert=2,$	$L(-1+2i)=0,$	$L(1+2i)=\infty,$	$L(\infty)=1$
12.	$\gamma: \mathrm{Im}\, z=1,$	$L(2+i)=0,$	$L(-2-2i)=\infty,$	$L(\infty)=-2$

13.	$\gamma : \lvert z+1\rvert = 2,$	$L(-2-i)=0,$	$L(-2+i)=\infty,$	$L(\infty)=2$
14.	$\gamma : \mathrm{Re}\, z = 2\mathrm{Im}\, z,$	$L(1-3i)=0,$	$L(1+3i)=\infty,$	$L(\infty)=-1$
15.	$\gamma : \lvert z+2i\rvert = 1,$	$L(-1-3i)=0,$	$L(-1-2i)=\infty,$	$L(\infty)=i$
16.	$\gamma : 2\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 0,$	$L(1+3i)=0,$	$L(1-2i)=\infty,$	$L(\infty)=1$
17.	$\gamma : \lvert z+2\rvert = 1,$	$L(3+i)=0,$	$L(-2+i)=\infty,$	$L(\infty)=-2$
18.	$\gamma : \mathrm{Re}\, z = 2,$	$L(-3+i)=0,$	$L(-3-i)=\infty,$	$L(\infty)=-i$
19.	$\gamma : \lvert z-1-i\rvert = 1,$	$L(2+3i)=0,$	$L(2+i)=\infty,$	$L(\infty)=-1$
20.	$\gamma : \mathrm{Im}\, z = -1,$	$L(1+i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=i$
21.	$\gamma : \lvert z-1+i\rvert = 1,$	$L(1-i)=0,$	$L(2-i)=\infty,$	$L(\infty)=1$
22.	$\gamma : 2\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z,$	$L(-1-i)=0,$	$L(1-i)=\infty,$	$L(\infty)=-i$
23.	$\gamma : \lvert z+1+i\rvert = 1,$	$L(2+2i)=0,$	$L(-1-i)=\infty,$	$L(\infty)=-1$
24.	$\gamma : \mathrm{Re}\, z + 2\mathrm{Im}\, z = 0,$	$L(1-2i)=0,$	$L(2-i)=\infty,$	$L(\infty)=i$

VII. Установить, сходится ли указанный ряд в точках z_1 и z_2, указать на комплексной плоскости круг сходимости и эти точки.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{in(z-i+3)^n}{(n^2+1)},\qquad z_1 = \frac{i}{2} - 3,\ z_2 = 1+i$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^n}{\sqrt{n}}(z-1-i)^n,\qquad z_1 = 1 + \frac{2}{3}i,\ z_2 = -2-i$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i}{2^n 3^{n+1}}(z-2+4i)^n,\qquad z_1 = 2-i,\ z_2 = -3+5i$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+i)^2}(z-\frac{1}{2}-i)^n,\qquad z_1 = 1+\frac{i}{2},\ z_2 = -3-i$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+i}{n2^n}(z+3i)^n,\qquad z_1 = 1-2i,\ z_2 = 2+i$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(1+i)^n}(z-i)^n,\qquad z_1 = 1+i,\ z_2 = -2+i$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(3+4i)^n}(z-2i)^n,\qquad z_1 = 2+i,\ z_2 = -5+i$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}(z-2-i)^n,\qquad z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = 2+2i$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-i}{2^n}(z-3-i)^n,\qquad z_1 = 2+i,\ z_2 = -2+3i$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n+i}(z-1+2i)^n, \qquad z_1 = \tfrac{3}{4} - 2i,\ z_2 = -2 - i$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{in}(z+2-i)^n, \qquad z_1 = \tfrac{1}{2} + i,\ z_2 = -2 + \tfrac{1}{2}i$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(3i)^n}(z-1+i)^n, \qquad z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 + 2i$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i2^{n+1}3^n(z-2+i)^n, \qquad z_1 = i,\ z_2 = 2 - \tfrac{6}{7}i$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3i)^2(z+2-i)^n, \qquad z_1 = -2 + \tfrac{1}{3}i,\ z_2 = 1 + i$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-i)n3^{n-1}(z+1-i)^n, \qquad z_1 = 1 - i,\ z_2 = -\tfrac{5}{4} + i$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^5}(z+i)^n, \qquad z_1 = \tfrac{1}{2} - i,\ z_2 = 1 + 2i$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2+1}(z-2i)^n, \qquad z_1 = 1 + i,\ z_2 = \tfrac{1}{4} + 2i$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{2^n}(z-2-i)^n, \qquad z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 + 3i$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n}{2n+i}(z+2i)^n, \qquad z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = \tfrac{1}{3} - 2i$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2i}{4^n}(z+1+2i)^n, \qquad z_1 = -1 - i,\ z_2 = 1 + i$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2i}{n+i}(z-2+i)^n, \qquad z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 - \tfrac{1}{2}i$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{\sqrt{n^2+2}}(z-2+i)^n, \qquad z_1 = -2 + \tfrac{3}{4}i, z_2 = 2 - i$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n i}{3^n+n}(z-i)^n, \qquad z_1 = 1 - i,\ z_2 = i - 1$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{(3n+2)^2}, \qquad z_1 = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2},\ z_2 = i - 1$

VIII. Установить с помощью теоремы Коши–Римана, является ли аналитической следующая функция

1. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$	2. $f(z) = \overline{z}^2(2-i)$	3. $f(z) = z\overline{z}$
4. $f(z) = \overline{z}^2 + z$	5. $f(z) = z^2\overline{z}$	6. $f(z) = \overline{z}e^z$
7. $f(z) = \overline{z}^2$	8. $f(z) = z + e^z$	9. $f(z) = z^2 + 2\overline{z}$
10. $f(z) = e^{\overline{z}}$	11. $f(z) = z\overline{z} + \overline{z}$	12. $f(z) = i\overline{z}^2 + \overline{z}$
13. $f(z) = \overline{z}^2 + iz$	14. $f(z) = 2z\overline{z} + z$	15. $f(z) = \overline{z} + e^{\overline{z}}$
16. $f(z) = iz^2 + e^{iz}$	17. $f(z) = \overline{z}^2 + 2\overline{z} + 1$	18. $f(z) = z + e^{-z}$
19. $f(z) = z^2 + z\overline{z}$	20. $f(z) = e^{\overline{z}} + e^z$	21. $f(z) = i\overline{z}^2 + 2\overline{z}$
22. $f(z) = \overline{z}^2 + i\overline{z}$	23. $f(z) = 2z\overline{z} + z$	24. $f(z) = \overline{z} + e^{-\overline{z}}$

IX. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз.

1. $\int\limits_\gamma \frac{\overline{z}}{z}\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\ z < 0$
2. $\int\limits_\gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $1 < |z| < 2, \mathrm{Im}\ z > 0$
3. $\int\limits_\gamma \overline{z}\,dz,$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$
4. $\int\limits_\gamma |z|\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\ z > 0$
5. $\int\limits_\gamma |z|\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Re}\ z > 0$
6. $\int\limits_\gamma e^{\overline{z}}\,dz,$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1 + i$
7. $\int\limits_\gamma |z|\overline{z}\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Re}\ z < 0$
8. $\int\limits_\gamma |z^2|\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 3, \mathrm{Im}\ z < 0$
9. $\int\limits_\gamma \mathrm{Im}\ z\,dz,$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = 2 + i, z_3 = 1 + i$
10. $\int\limits_\gamma z|z|\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 2, \mathrm{Re}\ z > 0$
11. $\int\limits_\gamma z\overline{z}\,dz,$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 3, \mathrm{Re}\ z < 0$
12. $\int\limits_\gamma (\overline{z} + \mathrm{Re}\ z)\,dz$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = -1, z_2 = -2 + i, z_3 = -1 + i$

13. $\int\limits_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\, z < 0$

14. $\int\limits_\gamma (z + \overline{z})\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 2, \mathrm{Re}\, z > 0$

15. $\int\limits_\gamma (z + \mathrm{Re}\, z)\, dz$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 - i$

16. $\int\limits_\gamma (\overline{z} + \mathrm{Im}\, z)\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0$

17. $\int\limits_\gamma \overline{z}\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 2, \mathrm{Re}\, z < 0$

18. $\int\limits_\gamma e^{\overline{z}}\, dz$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$

19. $\int\limits_\gamma |z|\overline{z}\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\, z < 0$

20. $\int\limits_\gamma \frac{\overline{z}}{z}\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 2, \mathrm{Re}\, z > 0$

21. $\int\limits_\gamma \frac{z}{\overline{z}}\, dz$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = -1, z_2 = -1 + i, z_3 = 0$

22. $\int\limits_\gamma |z^2|\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0$

23. $\int\limits_\gamma z|z|\, dz$ где $\gamma -$ граница области $|z| < 2, \mathrm{Re}\, z < 0$

24. $\int\limits_\gamma z\overline{z}\, dz$ где $\gamma -$ контур треугольника с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$

X. Вычислить интеграл, считая, что контур интегрирования пробегается в положительном направлении один раз.

1. а) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{2z}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi)}{(z-2)(z+2i)}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=2} iz \sin\frac{1}{z+1}\, dz$,

2. а) $\int\limits_{|z+2i|=1} \frac{e^z}{(z+2i)^2(z-2)}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+i)(z-1)}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z+i}}\, dz$,

3. а) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2+5}{z^{-}1}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{z+i\pi}}{z^2-1}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=3} (iz-1)\cos\frac{1}{z+i}\, dz$,

4. а) $\int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{(z-i)^2 z}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos(z+\frac{\pi}{2})}{z^2+iz}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=3} z^2 \sin\frac{2}{z-1}\, dz$,

5. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^2(2z)}{z-i}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+z) e^{\frac{2}{z-i}}\, dz$,

6. а) $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(2z)}{(z+1)^2 z}\, dz$, б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{z+i\frac{\pi}{2}}}{(z+1)(z-i)}\, dz$, в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2-z)\cos\frac{2}{z-1}\, dz$,

7. а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z+\frac{\pi}{2})}{z+1}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(\pi-z)}{(z-2)(z-2i)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+1)\sin\frac{1}{z+i}\,dz,$

8. а) $\int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{(z+i)^2 z}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin(\pi+z)}{z^2+4}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+1)e^{\frac{1}{z-i}}\,dz,$

9. а) $\int\limits_{|z+i|=1} \frac{z^3+1}{z+i}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2-4}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+2zi)\cos\frac{2}{z+1}\,dz,$

10. а) $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{iz}}{(z-2)^2(z+i)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos(2z+\frac{\pi}{2})}{z^2-3iz-2}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+iz)\sin\frac{2}{z-i}\,dz,$

11. а) $\int\limits_{|z+1|=2} \frac{z^3+2}{z^2-z-2}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin(2z)}{z^2+3iz-2}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (2iz-1)e^{\frac{1}{z-1}}\,dz,$

12. а) $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{\cos(2iz)}{(z+2)^2(z-i)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz+i\frac{\pi}{2}}}{z^2-z-6}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (3iz+2)\cos\frac{1}{z+i}\,dz,$

13. а) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2}{z^2-1}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos(2z)}{(z-3)(z+i)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (i-2z)\ \sin\frac{1}{z-i}\,dz,$

14. а) $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\sin(-2z)}{(z-2i)^2(z+1)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin(iz+\pi)}{(z+3)(z-i)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2-iz)\ e^{2/(z-i)}\,dz,$

15. а) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2+3}{z^2+1}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{i\pi-iz}}{(z+i)(z+3)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z-z^2)\ \cos\frac{1}{z-i}\,dz,$

16. а) $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{\cos(2z)}{(z+2)^2(z+3i)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{\cos(\pi-iz)}{(z+4i)(z+i)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (2iz-z^2)\ \sin\frac{1}{z+i}\,dz,$

17. а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^4}{z^2-3iz-2}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{\sin(2\pi-z)}{(z-4)(z+3i)}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} 2z^2\cdot e^{2/(z-i)}\,dz,$

18. а) $\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{e^{2z}}{(z+3i)^2\cdot(z-2)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{2z-i\pi}}{z^2-iz+12}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (iz-z^2)\ \cos\frac{1}{z+i}\,dz,$

19. а) $\int\limits_{|z-2i|=1/2} \frac{\cos(z+2i)}{z^2+iz+2}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\ z^2}{z^2+3i\cdot z-2}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} 2i\cdot z^2\cdot\sin\frac{1}{i-z}\,dz,$

20. а) $\int\limits_{|z-3i|=1} \frac{sin(3i\cdot z)}{(z-3i)^2(z+2)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin^2 z}{z^2-3i\cdot z-2}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (3i\cdot z+1)\ e^{2/(1-z)}\,dz,$

21. а) $\int\limits_{|z+2i|=1} \frac{e^{z+i}}{z^2-iz+2}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2+iz+6}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (z^2+iz)\ \cos\frac{2}{i-z}\,dz,$

22. а) $\int\limits_{|z-4i|=1} \frac{\cos(z-\pi/2)}{(z-4i)^2(z+2)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{\cos(z+z^2)}{z^2-iz+6}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (i\cdot z-z^2)\ \sin\frac{2}{1-z}\,dz,$

23. а) $\int\limits_{|z+3i|=1} \frac{\sin^2 z}{z^2+9}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{\sin(2z^2)}{z^2-5i\cdot z-6}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (2z-3i)\ e^{1/(z+i)}\,dz,$

24. а) $\int\limits_{|z+4|=1} \frac{e^{2-z}}{(z+4)^2\cdot(z-i)}\,dz,$ б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{iz^2}}{z^2+5i\cdot z-6}\,dz,$ в) $\int\limits_{|z|=2} (2z^2+i\cdot z)\ \sin\frac{1}{z+i}\,dz.$